## Chapitre 6

# Applications, relations

## Plan du chapitre

# 1 Application

## 1.1 Définitions et notations

**Définition 6.1 (Définition “intuitive”)**

Soit $E, F$ deux ensembles. On dit que $f$ est une application de $E$ dans $F$ si à chaque $x$ de $E$, elle associe une unique valeur, notée $f(x)$, dans $F$ :

$$\forall x \in E \quad \exists! y \in F \qquad y = f(x)$$

- $E$ est appelé ensemble de départ de $f$.
- $F$ est appelé ensemble d'arrivée de $f$.
- L'ensemble $\Gamma = \{(x, f(x)) \mid x \in E\}$ est appelé le graphe de $f$. En particulier, $\Gamma \subset E \times F$.
- La valeur $f(x)$ est appelée l'image par $f$ de $x$.
- Si $y = f(x)$, alors $x$ est appelé UN antécédent de $y$ par $f$.

Pour une même valeur de $y$, il peut y avoir plusieurs antécédents par $f$. Par exemple pour l'application définie par $f(x) = x^2$, le réel 4 a deux antécédents 2 et $-2$ par $f$.

**Notation.**
- On écrit $f : E \to F$ pour indiquer que $f$ est une application ayant $E$ et $F$ comme ensembles de départ et d'arrivée respectivement. Cette écriture ne précise pas la valeur de $f(x)$ pour un $x$ dans $E$. *Écrire $f : E \to F$ entraine que $f$ est définie sur $E$ tout entier.*
- On écrit $f : x \mapsto \ldots$ pour indiquer que l'application transforme un $x$ quelconque de l'ensemble de départ en une expression donnée (pouvant dépendre de $x$ ou non). *Pour utilier cette écriture, il faut avoir précisé au préalable les ensembles de départ et d'arrivée de $f$* (ou bien ils sont évidents et sous-entendus).
- On peut combiner les écritures :

$$\begin{aligned} f : E &\to F \\ x &\mapsto \ldots \end{aligned} \qquad\qquad f : x \in E \mapsto \ldots$$

- On note $\mathcal{F}(E, F)$ ou $F^E$ l'ensemble des applications de $E$ dans $F$.

## 1.2 Applications bien définies

Pour qu'une application $f : E \to F$ soit bien définie, il faut que, pour ***chaque*** élément $x \in E$ :
- $f(x)$ ait un sens.
- $f(x)$ appartienne à $F$.
- $f(x)$ soit défini de manière unique.

Les applications suivantes sont-elles bien définies ?

$$\begin{aligned} f_1 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_2 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+^* \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_3 : [1, +\infty[ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} f_4 : \mathbb{R} &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \text{"L'unique solution positive de } x^2 = a\text{''} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_5 : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ a &\mapsto \text{"idem que } f_4\text{''} \end{aligned} \qquad \begin{aligned} f_6 : \mathbb{R} &\to \mathbb{C} \\ a &\mapsto \text{"idem que } f_4\text{''} \end{aligned}$$

**Définition 6.2**

Soit $f : E \to F$ et $g : E' \to F'$ deux applications. On dit que $f$ et $g$ sont égales et on écrit $f = g$ si

$$E = E' \qquad \text{et} \qquad F = F' \qquad \text{et} \qquad \forall x \in E \qquad f(x) = g(x)$$

Ainsi, il faut donc que $f$ et $g$ aient les mêmes ensembles de départ et d'arrivée et que $f$ et $g$ prennent les mêmes valeurs pour chaque élément de l'ensemble de départ.

**Exemple 1.** Est-ce que, parmi les fonctions $f_1, \cdots, f_6$ ci-dessus, deux d'entre elles sont égales ?

## 1.3 Prolongement, restriction

**Définition 6.3 (Restriction et prolongement)**

Soit $E, F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application.

- Soit $A \subset E$. On appelle restriction de $f$ à $A$, notée $f|_A$, la fonction définie par

$$\begin{aligned} f|_A : A &\to F \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

- On dit qu'une application $g$ est un prolongement de $f$ si $f$ est une restriction de $g$.

Pour tout $x \in A$, on a toujours $f|_A(x) = f(x)$. Pour autant, $f \neq f|_A$ a priori : ces deux fonctions n'ont pas le même ensemble de départ (sauf si $A = E$).

**Exemple 2.**

1. L'application $f_3$ dans la remarque ci-dessus est la restriction à $[1, +\infty[$ de l'application $f_1$ (mais pas de $f_2$ car l'ensemble d'arrivée diffère).
2. L'application

$$h : x \in \mathbb{R} \mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$$

est un prolongement de l'application "signe" : $x \in \mathbb{R}^* \mapsto \dfrac{x}{|x|}$.

**Définition 6.4 (Corestriction)**

**(Semi-officiel)** Soit $E, F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. Soit $B \subset F$. On appelle corestriction de $f$ à $B$, parfois notée $f|^B$, la fonction définie par

$$\begin{aligned} f|^B : E &\to B \\ x &\mapsto f(x) \end{aligned}$$

À noter : pour que cette application soit bien définie, il faut s'assurer que pour tout $x \in E$, on a bien $f(x) \in B$.

**Exemple 3.** L'application $f_2$ dans la remarque ci-dessus est la co-restriction à $\mathbb{R}_+^*$ de l'application $f_1$ : cependant, on a vu qu'elle n'était pas bien définie car $f_2(0) = \sqrt{0} = 0 \notin \mathbb{R}_+^*$. En revanche, la corestriction de $f_1$ à $\mathbb{R}_+$ est bien définie : c'est l'application

$$\begin{aligned} f_1|^{\mathbb{R}_+} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

### 1.4 Exemples d'applications

**Exemple 4.** Soit $E$ un ensemble. L'application identité de $E$ est définie et notée par :

$$\begin{aligned} \mathrm{id}_E : E &\to E \\ x &\mapsto x \end{aligned}$$

**Exemple 5.** Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite réelle. On peut la considérer comme une application $u \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ :

$$\begin{aligned} u : \mathbb{N} &\to \mathbb{R} \\ n &\mapsto u_n \end{aligned}$$

**Exemple 6.** Soit $I$ et $E$ deux ensembles quelconques et $(a_i)_{i\in I}$ une famille d'éléments de $E$. On peut considérer cette famille comme une application $a \in E^I$ :

$$\begin{aligned} a : I &\to E \\ i &\mapsto a_i \end{aligned}$$

**Exemple 7.** Soit $E$ un ensemble et $A \subset E$. On définit l'application indicatrice sur $A$ par :

$$\begin{aligned} 1_A : E &\to \{0,1\} \\ x &\mapsto \begin{cases} 1 & \text{si } x \in A \\ 0 & \text{si } x \notin A \end{cases} \end{aligned}$$

**Exemple 8.** Soit $E$ un ensemble et $A, B$ deux parties de $E$. Alors :

$$\forall x \in E \qquad 1_{A\cap B}(x) = 1_A(x)1_B(x)$$

$$\forall x \in E \qquad 1_{A\cup B}(x) = \max(1_A(x), 1_B(x))$$

$$\forall x \in E \qquad 1_{\overline{A}}(x) = 1 - 1_A(x)$$

## 2 Images directe et réciproque

### 2.1 Image directe

**Définition 6.5 (Image directe)**

Soit $f : E \to F$ une application et $A \subset E$. L'image directe de $A$ par $f$ est l'ensemble des images des éléments de $A$, notée

$$f(A) := \{f(x) \mid x \in A\} \quad \subset F$$

Si $x \in E$ et $A \subset E$, on prendra garde au fait que $f(x)$ est un *élément* de $F$, mais que $f(A)$ est un *sous-ensemble* de $F$. Ainsi,

$$f(\{x\}) = \{f(x)\} \qquad f(\{x,y\}) = \{f(x), f(y)\} \qquad f(\varnothing) = \varnothing$$

**Exemple 9.**
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x+1$.
  - Si $A = \{0,4,5\}$, alors $f(A) = \{1,13,16\}$.
  - Si $A = [2,7[$, alors $f(A) = [7,22[$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$, alors

$$f([-3,2]) = \dots \qquad f([0,3]) = \dots$$
$$f(\{-1,1\}) = \dots \qquad f(\mathbb{R}) = \dots$$

- $\cos(\pi\mathbb{Z}) = \dots$ $\qquad$ $\sin(\pi\mathbb{Z}) = \dots$

**Définition 6.6**

Soit $f : E \to E$ une application et $A \subset E$. On dit que $A$ est stable par $f$ si $f(A) \subset A$.

### 2.2 Image réciproque

**Définition 6.7 (Image réciproque)**

Soit $f : E \to F$ une application et $B \subset F$. L'image réciproque de $B$ par $f$ est l'ensemble des antécédents des éléments de $B$, notée

$$f^{\leftarrow}(B) := \{x \in E \mid f(x) \in B\} \quad \subset E$$

**Remarque.** La notation $f^{\leftarrow}(B)$ sera plus tard remplacée par une autre. On l'introduit ici pour éviter des confusions.

**Exemple 10.**
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = 3x+1$.
  - Si $B = [10,16]$, alors $f^{\leftarrow}(B) = [3,5]$.
  - Si $B = \{0\}$, alors $f^{\leftarrow}(B) = \left\{-\frac{1}{3}\right\}$.
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x^2$, alors

$$f^{\leftarrow}([1,4]) = \dots \qquad f^{\leftarrow}([-4,-1]) = \dots$$
$$f^{\leftarrow}(\{2\}) = \dots \qquad f^{\leftarrow}(\mathbb{R}) = \dots$$

- $\cos^{\leftarrow}(\{0\}) = \dots$ $\qquad$ $\sin^{\leftarrow}(\{0\}) = \dots$

### 2.3 Propriétés des images directe et réciproque

**Propriété 6.8 (Caractérisations de $f(A)$ et de $f^{\leftarrow}(B)$)**

Soit $f : E \to F$ une application. Soit $A \subset E$ et $B \subset F$.

$$\forall y \in F \qquad y \in f(A) \iff \exists x' \in A \quad y = f(x')$$
$$\forall x \in E \qquad x \in f^{\leftarrow}(B) \iff f(x) \in B$$

**Propriété 6.9 (Propriétés des images directes et réciproques)**

Soit $f : E \to F$ une application.

1. Soit $A, A' \in \mathscr{P}(E)$ :
   (a) $A \subset A' \implies f(A) \subset f(A')$
   (b) $f(A \cup A') = f(A) \cup f(A')$
   (c) $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$ (attention c'est bien $\subset$ !)
2. Soit $B, B' \in \mathscr{P}(F)$ :
   (a) $B \subset B' \implies f^{\leftarrow}(B) \subset f^{\leftarrow}(B')$
   (b) $f^{\leftarrow}(B \cup B') = f^{\leftarrow}(B) \cup f^{\leftarrow}(B')$
   (c) $f^{\leftarrow}(B \cap B') = f^{\leftarrow}(B) \cap f^{\leftarrow}(B')$
   (d) $f^{\leftarrow}(\overline{B}) = \overline{f^{\leftarrow}(B)}$

*Démonstration.*

-

-

- Maintenant, montrons 1) c). Soit $A, A' \subset E$ et $y \in F$.

$$\begin{aligned} y \in f(A \cap A') &\iff \exists x \in A \cap A' \quad y = f(x) \\ &\implies \exists x \in A \quad y = f(x) \quad \text{et} \quad \exists x' \in A' \quad y = f(x') \qquad (*) \\ &\iff y \in f(A) \quad \text{et} \quad y \in f(A') \\ &\iff y \in f(A) \cap f(A') \end{aligned}$$

D'où par arbitraire sur $y$, on a $f(A \cap A') \subset f(A) \cap f(A')$.

*Note : la ligne $(*)$ n'est pas équivalente à la ligne qui lui précède. En effet si on suppose $(*)$ on a* a priori $x \neq x'$ *et donc on ne peut pas en déduire que $y$ est l'image d'un élément de $A \cap A'$. C'est pour ça qu'on n'a qu'une inclusion et qu'en général $f(A) \cap f(A') \not\subset f(A \cap A')$. Contre-exemple :*

$$A = \{0\} \qquad A' = \{1\} \qquad f : x \in \{0,1\} \mapsto 0$$

*alors $f(A) = f(A') = \{0\}$ et $f(A \cap A') = f(\varnothing) = \varnothing$.*

•

•

□

## 3 Composition d'applications

**Définition 6.10 (Composition)**

Soit $E$, $F$, $G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications. On appelle composée de $g$ et $f$, notée $g \circ f$ l'application

$$\begin{aligned} g \circ f : E &\to G \\ x &\mapsto g(f(x)) \end{aligned}$$

**Exemple 11.**

- Soit $f \in \mathcal{F}(E,F)$. Alors $f \circ \mathrm{id}_E = f$ et $\mathrm{id}_F \circ f = f$.
- On pose

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R} &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto x^2 \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} g : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

Alors

$$\begin{aligned} g \circ f : \ldots &\to \ldots \\ x &\mapsto \ldots \end{aligned} \qquad\qquad \begin{aligned} f \circ g : \ldots &\to \ldots \\ x &\mapsto \ldots \end{aligned}$$

**Remarque** (Non commutativité de $\circ$)**.** Dans les cas où $g \circ f$ et $f \circ g$ sont bien définies, on a en général $g \circ f \neq f \circ g$, comme le montre l'exemple ci-dessus. Voici un autre contre-exemple, où cette fois $g \circ f$ et $f \circ g$ ont les mêmes ensembles de départ et d'arrivée :

$$\begin{cases} f : x \mapsto x+1 \\ g : x \mapsto x^2 \end{cases} \implies \forall x \in \mathbb{R} \quad \begin{cases} (g \circ f)(x) = \ldots \\ (f \circ g)(x) = \ldots \end{cases}$$

**Exemple 12.** On pose

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \qquad\qquad g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}$$
$$x \mapsto e^x \qquad\qquad x \mapsto \ln x$$

Est-ce que l'application $f \circ g$ a un sens ? ...
Même question pour $g \circ f$ : ...

**Remarque.** Pour que l'application $g \circ f$ soit bien définie, il suffit que $g(f(x))$ ait un sens pour tout $x$ dans $E$. En particulier, il suffit que $g$ soit définie sur $f(E) = \{f(x) \in F \mid x \in E\}$, et non sur $F$ tout entier. De manière équivalente, il suffit qu'on puisse co-restreindre $f$ de sorte que son ensemble d'arrivée soit inclus dans l'ensemble de départ de $g$.

**Propriété 6.11 ("Associativité" de la composition)**

Soit $E, F, G, H$ quatre ensembles, $f : E \to F$, $g : F \to G$ et $h : G \to H$ trois applications. Alors

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

*Démonstration.* Ces deux applications ont les mêmes ensembles de départ (ici $E$) et d'arrivée (ici $H$). Enfin, pour tout $x \in E$, on a :

$$[(h \circ g) \circ f](x) = (h \circ g)(f(x)) = h(g(f(x))) = h((g \circ f)(x)) = [h \circ (g \circ f)](x)$$

Ainsi, $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$. □

**Remarque.** On a déjà vu que les opérations $+$, $\times$, $\cup$, $\cap$, "et", "ou" sont, elles aussi, associatives. Cette propriété d'associativité permet d'écrire $h \circ g \circ f$ sans ambiguïté.

# 4 Injection, surjection, bijection

## 4.1 Injection

**Définition 6.12 (Injection)**

Soit $E, F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est une <u>injection</u> (ou qu'elle est <u>injective</u>) lorsque tout élément $y$ de $F$ admet **au plus un antécédent**, i.e. :

$$\forall x, x' \in E \qquad f(x) = f(x') \implies x = x'$$

Ainsi, $f$ est injective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet **au plus / au maximum** une solution (dans $E$).

**Méthode**

Pour montrer qu'une application $f$ est injective, on reprend la définition ci-dessus.
Pour montrer qu'une application $f$ n'est PAS injective, il suffit de montrer la négation, donc de trouver $x$ et $x'$ dans $E$ tels que $x \neq x'$ et $f(x) = f(x')$.

**Exemple 13.**
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1)$ mais $1 \neq -1$.
- En revanche, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = \sqrt{x}$ est injective. En effet, pour tous $x, x' \in \mathbb{R}_+$, on a

$$f(x) = f(x') \implies \sqrt{x} = \sqrt{x'} \implies x = x'$$

- Pour tout ensemble $E$, l'application $\mathrm{id}_E$ est injective.
- Est-ce que l'application suivante est injective ?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto |x| \end{aligned}$$

Réponse : ...... car ...

## 4.2 Surjection

**Définition 6.13 (Surjection)**

Soit $E, F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est une surjection (ou qu'elle est surjective) lorsque tout élément $y$ de $F$ admet **au moins un antécédent**, i.e. :

$$\forall y \in F \qquad \exists x \in E \quad y = f(x)$$

Ainsi, $f$ est surjective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet **au moins / au minimum** une solution (dans $E$).

**Méthode**

Pour montrer qu'une application $f$ est surjective, on reprend la définition ci-dessus.
Pour montrer qu'une application $f$ n'est PAS surjective, il suffit de montrer la négation, donc de trouver un élément $y$ de $F$ qui n'a pas d'antécédent par $f$, i.e. tel que $\forall x \in E \quad y \neq f(x)$.

**Exemple 14.**
- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f$ n'est pas surjective car $-1$ n'a pas d'antécédent par $f$.
- En revanche, $f : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ définie par $f(z) = z^2$ est surjective. En effet, tout réel $y$ admet (au moins) un antécédent par $f$ :

$$\forall y \in \mathbb{R}_+ \qquad f(\sqrt{y}) = y$$

$$\forall y \in \mathbb{R}_- \qquad f(i\sqrt{-y}) = y$$

- Pour tout ensemble $E$, l'application $\mathrm{id}_E$ est surjective.
- Est-ce que l'application suivante est surjective ?

$$\begin{aligned} f : \mathbb{Q} &\to \mathbb{Q} \\ x &\mapsto 2x \end{aligned}$$

Réponse : ...... car ...

### 4.3 Bijection

**Définition 6.14 (Bijection)**

Soit $E, F$ deux ensembles et $f : E \to F$ une application. On dit que $f$ est une bijection (ou qu'elle est bijective) lorsqu'elle est à la fois injective et surjective, c'est-à-dire que tout élément de $F$ admet **exactement un antécédent**, i.e. :

$$\forall y \in F \quad \exists ! x \in E \qquad y = f(x)$$

Ainsi, $f$ est bijective si et seulement si, pour tout $y \in F$, l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ admet **exactement une / une et une seule** solution (dans $E$).

**Méthode**

Pour montrer qu'une application $f$ est bijective, on peut montrer que c'est une application injective et surjective, ou bien montrer l'assertion ci-dessus.
Pour montrer qu'une application $f$ n'est PAS bijective, on peut montrer qu'elle n'est pas injective ou encore qu'elle n'est pas surjective.

**Exemple 15.**

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$. Pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, on a

$$f(x) = y \iff x = \ln y$$

Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}_+^*$, l'équation $f(x) = y$ admet une unique solution dans $\mathbb{R}$. $f$ est donc bijective.

- Pour tout ensemble $E$, l'identité $\mathrm{id}_E$ est bijective.
- L'application $\cos : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ n'est pas bijective car ...
- L'application $\sin : [0, \pi] \to [0, 1]$ n'est pas bijective car ...

**Remarque** (***jectivité dépend des ensembles de départ et d'arrivée)**.** Ci-dessous on considère la fonction $f : x \mapsto x^2$. Selon les ensembles de départ et d'arrivée de $f$, déterminer s'il s'agit d'une injection, d'une surjection ou d'une bijection.

| $f : x \mapsto x^2$ | Injection | Surjection | Bijection |
|---|---|---|---|
| $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ | | | |
| $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ | | | |
| $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ | | | |
| $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ | | | |

En termes de rédaction il est donc important de lever les éventuels doutes en précisant "$f$ est une injection / surjection / bijection de $A$ sur $B$".

### 4.4 Propriétés des ***jections

**Propriété 6.15**

Soit $f : E \to F$ une application. Alors $f$ est surjective si et seulement si $f(E) = F$.

*Démonstration.* Par définition, on a toujours $f(E) \subset F$. Ainsi, il suffit de montrer que $f$ est surjective si et seulement si $F \subset f(E)$.

$$\begin{aligned} F \subset f(E) &\iff \forall y \in F \qquad y \in f(E) \\ &\iff \forall y \in F \qquad \exists x \in E \qquad y = f(x) \\ &\iff f \text{ est surjective} \end{aligned}$$

□

On peut donner des caractérisations similaires pour l'injectivité et la bijectivité, mais elles sont moins utiles :

- $f$ est injective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{\leftarrow}(\{y\})$ possède au plus un élément.
- $f$ est bijective si et seulement si pour tout $y \in F$, l'ensemble $f^{\leftarrow}(\{y\})$ est un singleton.

**Propriété 6.16 (***jection et composition)**

Soit $E, F, G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications.

1. Si $f$ et $g$ sont injectives, alors $g \circ f$ est injective.
2. Si $f$ et $g$ sont surjectives, alors $g \circ f$ est surjective.
3. Si $f$ et $g$ sont bijectives, alors $g \circ f$ est bijective.

*Démonstration.*

1.

2.

3.

□

### 4.5 Application réciproque

Rappel : si $f : E \to F$ est bijective, alors pour tout $y \in F$, il existe un unique $x \in E$ tel que $f(x) = y$.

**Définition 6.17 (Application réciproque)**

Soit $f : E \to F$ une application bijective. Alors on peut définir une application $f^{-1} : F \to E$, qui à chaque $y \in F$ associe l'unique élément $x \in E$ tel que $y = f(x)$. On appelle cette application l'application réciproque de $f$. On a ainsi

$$f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F$$

**Exemple 16.**

- Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ définie par $f(x) = e^x$. Alors $f$ est bijective et admet pour application réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+^* &\to \mathbb{R} \\ x &\mapsto \ln x \end{aligned}$$

- Soit $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ définie par $f(x) = x^2$. Alors $f$ est bijective et admet pour application réciproque

$$\begin{aligned} f^{-1} : \mathbb{R}_+ &\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto \sqrt{x} \end{aligned}$$

**Propriété 6.18**

Soit $f : E \to F$ une bijection. Alors pour tout $(x, y) \in E \times F$,

$$f(x) = y \iff x = f^{-1}(y)$$

*Démonstration.* Implication directe : il suffit d'appliquer $f^{-1}$. Implication réciproque : il suffit d'appliquer $f$. □

**Propriété 6.19**

Soit $f : E \to F$ une application. On suppose qu'il existe une application $g : F \to E$ telle que

$$g \circ f = \mathrm{id}_E \qquad \text{et} \qquad f \circ g = \mathrm{id}_F$$

Alors $f$ est bijective et on a $g = f^{-1}$ (en particulier cette application $g$ est unique).

*Démonstration.* Soit $y \in F$. On résout l'équation $f(x) = y$ d'inconnue $x \in E$ par analyse-synthèse.

- Analyse : soit $x \in E$ qui vérifie $y = f(x)$. En appliquant la fonction $g$, on en déduit que

$$g(y) = g(f(x)) = x \qquad \text{car } g \circ f = \mathrm{id}_E$$

  Ainsi, on a nécessairement $x = g(y)$.
- Synthèse : on vérifie que $x = g(y)$ est bien solution. En appliquant $f$, on en déduit que

$$f(x) = f(g(y)) = y \qquad \text{car } f \circ g = \mathrm{id}_F$$

  De plus, on a bien $g(y) \in E$. Ainsi, $\mathcal{S} = \{g(y)\}$.

Il existe donc une unique solution dans $E$ à l'équation $f(x) = y$. Ainsi, $f$ est bijective. Or, cela signifie que l'unique solution de $f(x) = y$ est $f^{-1}(y)$. On en déduit que $f^{-1}(y) = g(y)$. Par arbitraire sur $y$, cela entraine que $g = f^{-1}$. Il n'y a donc bien qu'une seule application $g$ qui peut vérifier cette hypothèse : il s'agit de $f^{-1}$. □

**Remarque.** Dans le cas où $f : E \to E$ vérifie $f \circ f = \mathrm{id}_E$, on a donc $f^{-1} = f$. On dit alors que $f$ est une involution sur $E$.

**Exemple 17.**
- L'application $\mathrm{id}_E$ est une involution sur $E$.
- Les applications $z \mapsto -z$ et $z \mapsto \bar{z}$ sont des involutions sur $\mathbb{C}$. Elles sont donc bijectives et sont leur propre application réciproque.

### 4.6 Propriétés de l'application réciproque

**Propriété 6.20**

Soit $E, F, G$ trois ensembles, $f : E \to F$ et $g : F \to G$ deux applications bijectives. Alors :

1. L'application $f^{-1} : F \to E$ est également bijective et $(f^{-1})^{-1} = f$.
2. L'application $g \circ f : E \to G$ est bijective et $(g \circ f)^{-1} = f^{-1} \circ g^{-1}$.

*Démonstration.*

1. Comme $f$ est une bijection, on a
$$f \circ f^{-1} = \mathrm{id}_F \qquad \text{et} \qquad f^{-1} \circ f = \mathrm{id}_E$$
On peut ainsi appliquer la Propriété 6.19 à l'application $f^{-1}$ (en prenant $g = f$) : on déduit que $f^{-1}$ est bijective et que l'application réciproque de $f^{-1}$ est $f$. D'où le résultat.
2. L'application $f^{-1} \circ g^{-1}$ a bien un sens. Or, par associativité,
$$\begin{aligned}(f^{-1} \circ g^{-1}) \circ (g \circ f) &= f^{-1} \circ (g^{-1} \circ g) \circ f \\ &= f^{-1} \circ \mathrm{id}_F \circ f \\ &= f^{-1} \circ f \\ &= \mathrm{id}_E\end{aligned}$$
et de même $(g \circ f) \circ (f^{-1} \circ g^{-1}) = \mathrm{id}_G$. Donc par la proposition 6.19 appliquée à $g \circ f$, l'application $g \circ f$ est bijective et sa réciproque est $f^{-1} \circ g^{-1}$.

□

**Remarque.** Soit $f : E \to F$ une application bijective et $B \subset F$. Alors l'image directe de $B$ par $f^{-1}$ est égal à l'image réciproque de $B$ par $f$ :
$$f^{-1}(B) = f^{\leftarrow}(B)$$

**Notation.** Désormais, pour toute fonction $f$, **même non bijective**, on notera
$$\boxed{f^{-1}(B) := f^{\leftarrow}(B) = \{x \in E \mid f(x) \in B\}}$$

En particulier, **si $f$ n'est pas bijective** :

- on ne peut pas écrire $f^{-1}(y)$ avec $y \in F$ car l'application $f^{-1}$ n'est pas définie.
- **cependant, l'ensemble $f^{-1}(B)$ a toujours un sens, et on peut l'écrire.**

# 5 Transformations du plan complexe

**Définition 6.21**

On appelle transformation du plan (complexe) toute bijection $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$.

Il existe énormément de transformations du plan complexe. On expose ici quelques transformations remarquables.

## 5.1 Translations

**Propriété 6.22 (Translations)**

Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur du plan d'affixe $b$. Alors, la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ est la transformation

$$\tau : z \mapsto z + b$$

Son inverse est la translation de vecteur $-\overrightarrow{u}$, d'affixe $-b$ :

$$\tau^{-1} : z \mapsto z - b$$

## 5.2 Homothétie

On note $O$ l'origine du plan complexe (i.e. le point d'affixe 0).

**Propriété 6.23 (Homothéties)**

Soit $k \in \mathbb{R}^*$. Alors, l'homothétie de centre $O$ et de rapport $k$ est la transformation

$$h : z \mapsto kz \qquad \text{et donc} \qquad h^{-1} : z \mapsto \frac{1}{k} z$$

Si $\Omega$ est un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$. Alors, l'homothétie de centre $\Omega$ et de rapport $k$ est la transformation

$$h_\omega : z \mapsto z' := k(z - \omega) + \omega$$

*Pour $h_\omega$.* Si on note $M(z)$ et $M'(z')$ l'image de $M$ par $h_\omega$, alors on a

$$\overrightarrow{\Omega M'} = k\overrightarrow{\Omega M}$$

ce qui se traduit en termes d'affixes par

$$z' - \omega = k(z - \omega)$$

et donc $h_\omega(z) = z' = k(z - \omega) + \omega$. □

## 5.3 Rotations

On a déjà vu que multiplier un complexe $z$ par $e^{i\theta}$ revient à le faire "tourner" d'un angle $\theta$ (si $z \neq 0$, cela revient en effet à augmenter son argument de $\theta$).

**Propriété 6.24 (Rotations)**

Soit $\theta \in \mathbb{R}$. Alors, la rotation de centre $O$ et d'angle orienté $\theta$ est la transformation

$$\rho : z \mapsto e^{i\theta} z \qquad \text{et donc} \qquad \rho^{-1} : z \mapsto e^{-i\theta} z$$

Si $\Omega$ un point d'affixe $\omega \in \mathbb{C}$. Alors, la rotation de centre $\Omega$ et d'angle orienté $\theta$ est la transformation

$$\rho_\omega : z \mapsto z' := e^{i\theta}(z-\omega)+\omega$$

*Démonstration.* Cela suit le même principe que la preuve précédente. □

## 5.4 Similitudes directes

**Définition 6.25**

On dit que $s : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ est une similitude directe s'il existe $(a,b) \in \mathbb{C}^* \times \mathbb{C}$ tel que $s(z) = az+b$.

**Remarque** (Hors-programme)**.** Les similitudes directes sont exactement toutes les transformations du plan qui conserve les rapports entre distances et les angles orientés : si on note $A', B', C', D'$ les images de $A, B, C, D$ par une similitude directe, on a

$$\frac{A'B'}{C'D'} = \frac{AB}{CD} \qquad \text{et} \qquad (\overrightarrow{A'B'}, \overrightarrow{C'D'}) = (\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD})$$

Une propriété importante est que toute similitude directe peut s'écrire ou bien comme une translation, ou bien comme une composée d'une rotation et d'une homothétie. Reconnaitre une similitude, c'est identifier précisément quelles sont les transformations du plan qui la constituent.

**Méthode (Reconnaitre une similitude directe)**

Soit $s(z) = az+b$ une similitude directe.

- Si $a=1$, alors $s = \tau_{\overrightarrow{u}}$ est la translation de vecteur $\overrightarrow{u}$ d'affixe $b$.
- Si $a \neq 1$, alors $s$ admet un unique point fixe $\omega$, i.e. solution de $s(\omega) = \omega$, donc égal à $\dfrac{b}{1-a}$. Le point $\Omega$ d'affixe $\omega$ est appelé le centre de la similitude. $s$ est alors la composée de :
  - l'homothétie $h_\omega$ de centre $\omega$ et de rapport $|a|$ et de...
  - la rotation $\rho_\omega$ de centre $\omega$ et d'angle $\arg a$.

  L'ordre de la composition importe peu : exceptionnellement ici, $s = h_\omega \circ \rho_\omega = \rho_\omega \circ h_\omega$.

**Remarque.** Il existe des transformations du plan qui ne sont pas des similitudes directes, telles que la conjugaison complexe $z \mapsto \bar{z}$. Il s'agit en fait d'une *similitude indirecte*, car elle transforme un angle $\theta$ en $-\theta$. Mais cela n'est pas au programme.

# 6 Relation d'équivalence, relation d'ordre

**Définition 6.26 (Définition "intuitive")**

Soit $E$ un ensemble. Une relation (binaire) sur $E$ est la donnée d'une asertion $P(x,y)$ qui dépend de deux éléments $x, y \in E$ quelconques. Si on note cette relation $\mathcal{R}$, on écrira pour la définir :

$$x\mathcal{R}y \iff P(x,y)$$

**Exemple 18.**

- Sur $\mathbb{R}$, on peut définir la relation suivante : $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$.
- Sur $\mathbb{Z}$, on peut définir la relation "divise" : $b \mid a \iff \exists k \in \mathbb{Z} \quad a = kb$.
- Pour un ensemble $E$, on peut définir la relation "inclut" : $A\mathcal{R}B \iff A \subset B$.

## 6.1 Relation d'équivalence

**Définition 6.27 (Relation d'équivalence)**

Soit $E$ un ensemble. Une relation $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence sur $E$ si

1. $\mathcal{R}$ est réflexive, càd $\quad \forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
2. $\mathcal{R}$ est symétrique, càd $\quad \forall x, y \in E \quad x\mathcal{R}y \implies y\mathcal{R}x$
3. $\mathcal{R}$ est transitive, càd $\quad \forall x, y, z \in E \quad (x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z) \implies x\mathcal{R}z$

**Propriété 6.28**

Soit $n \in \mathbb{Z}$. La relation "congru modulo $m$" est une relation d'équivalence sur $\mathbb{Z}$.
(Rappel : pour tous $a, b \in \mathbb{Z}$, on définit $a \equiv b\,[m] \iff a - b \in m\mathbb{Z}$).

*Démonstration.*

$\square$

**Exemple 19.**

- On peut montrer que si $\alpha \in \mathbb{R}$ (par exemple $\alpha = 2\pi$), alors la relation "congru modulo $\alpha$" est également une relation d'équivalence sur $\mathbb{R}$.

- Dans tout ensemble $E$, la relation d'égalité $x\mathcal{R}y \iff x = y$ est aussi une relation d'équivalence.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$ n'est pas une relation d'équivalence car elle n'est pas ...

### 6.2 Aparté : extensions de certaines notions ensemblistes

Avant d'introduire la notion de classe d'équivalence, il faut étendre la notion d'union, d'intersection et de partition à une famille infinie d'ensembles.

**Définition 6.29 (Union et intersection)**

Soit $(A_i)_{i\in I}$ une famille de parties de $E$ indexée par un ensemble $I$ non vide (possiblement infini).

1. On définit l'intersection des $A_i$ comme étant l'ensemble $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \forall i \in I \quad x \in A_i\right\}$.
2. On définit la réunion des $A_i$ comme étant l'ensemble $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i := \left\{x \in E \mid \exists i \in I \quad x \in A_i\right\}$.
3. On dit que les $A_i$ sont deux à deux disjoints si $\forall (i, j) \in I^2 \quad i \neq j \implies A_i \cap A_j = \varnothing$.
4. On dit que les $A_i$ sont disjoints dans leur ensemble si $\displaystyle\bigcap_{i\in I} A_i = \varnothing$.

**Exemple 20.** Les ensembles

$$A = \{2,3\} \qquad B = \{1,3\} \qquad C = \{1,2\}$$

sont disjoints dans leur ensemble, mais pas 2 à 2.

**Définition 6.30 (Partition)**

Avec les mêmes hypothèses que ci-dessus, on dit que la famille $(A_i)_{i\in I}$ est une partition de $E$ si :

1. $\forall i \in I \quad A_i \neq \varnothing.$ [a]
2. $\displaystyle\bigcup_{i\in I} A_i = E.$
3. Les $A_i$ sont deux à deux disjoints.

*a.* Cette propriété n'apparait pas dans le chapitre 2 des ensembles. Il faut la rajouter. Il s'agit d'une convention, et c'est la façon la plus courante de définir une partition.

Rappel : dans une partition, chaque élément de $E$ est dans exactement un et un seul des sous-ensembles $A_i$.

**Exemple 21.** La famille $([k, k+1[)_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{R}$.
La famille $(\{k\})_{k\in\mathbb{Z}}$ forme une partition de $\mathbb{Z}$, de même que la famille $(\{2k, 2k+1\})_{k\in\mathbb{Z}}$.

### 6.3 Classes d'équivalence

**Définition 6.31 (Classe d'équivalence)**

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble $E$. Pour tout $x \in E$, on définit la classe d'équivalence de $x$ comme étant l'ensemble

$$\mathrm{cl}(x) := \{y \in E \mid x\mathcal{R}y\}$$

On la note parfois aussi $\bar{x}$ ou $[x]$. Un élément quelconque $y \in \bar{x}$ est dit un représentant de la classe.

**Exemple 22.**
- Dans tout ensemble $E$, la relation d'égalité est une relation d'équivalence et pour tout $x \in E$, on a $\mathrm{cl}(x) = \{x\}$.
- Dans $\mathbb{Z}$, si on considère la relation "congru modulo 5", alors $\mathrm{cl}(2) = \{2+5k \mid k \in \mathbb{Z}\} = 2+5\mathbb{Z}$.
  - Dans cette classe, on peut prendre comme représentants $2, 7, 12, -3, \cdots$
  - On peut remarquer que $\mathrm{cl}(2) = \mathrm{cl}(7) = \mathrm{cl}(12) = \mathrm{cl}(-3) = \ldots$

**Propriété 6.32 (Propriétés des classes d'équivalence)**

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence sur un ensemble $E$. Soit $x, y \in E$.

1. $x \in \mathrm{cl}(x)$ et en particulier, $\mathrm{cl}(x) \neq \varnothing$.
2. Si $x\mathcal{R}y$, alors $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$.
3. **Les (différentes) classes d'équivalence forment une partition de $E$.**

*Démonstration.*

1. Par réflexivité de $\mathcal{R}$, on a $x\mathcal{R}x$ donc $x \in \mathrm{cl}(x)$.
2. On suppose que $x\mathcal{R}y$. Soit $u \in \mathrm{cl}(x)$, montrons que $u \in \mathrm{cl}(y)$. Comme $u\mathcal{R}x$ et $x\mathcal{R}y$, par transitivité on obtient $u\mathcal{R}y$, si bien que $u \in \mathrm{cl}(y)$. Par arbitraire sur $u$, on a ainsi $\mathrm{cl}(x) \subset \mathrm{cl}(y)$. De même, on montre que $\mathrm{cl}(y) \subset \mathrm{cl}(x)$. D'où le résultat.
3. On vérifie successivement les 3 propriétés d'une partition :
   (a) Il faut tout d'abord que $\mathrm{cl}(x) \neq \varnothing$. Par la première assertion, c'est le cas.
   (b) Montrons que $E = \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$. Comme $\{x\} \subset \mathrm{cl}(x)$ par le 1), on obtient une première inclusion
   $$E = \bigcup_{x \in E} \{x\} \subset \bigcup_{x \in E} \mathrm{cl}(x)$$
   et l'inclusion réciproque est évidente car $\mathrm{cl}(x) \subset E$, donc la réunion de ces ensembles est également incluse dans $E$.
   (c) Montrons enfin que les classes (différentes) sont deux à deux disjointes. Soit $\mathrm{cl}(x)$ et $\mathrm{cl}(y)$ deux classes différentes : $\mathrm{cl}(x) \neq \mathrm{cl}(y)$. Montrons qu'elles sont disjointes. Supposons par l'absurde que $\mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y) \neq \varnothing$. Alors il existe $u \in \mathrm{cl}(x) \cap \mathrm{cl}(y)$. Ainsi $x\mathcal{R}u$ et $u\mathcal{R}y$. Par transitivité, on a $x\mathcal{R}y$ si bien que par la deuxième assertion, on a $\mathrm{cl}(x) = \mathrm{cl}(y)$. Contradiction. D'où le résultat.

□

**Exemple 23.** Dans $\mathbb{Z}$, si on considère la relation "congru modulo 5", alors il y a 5 (différentes) classes d'équivalence :

$$\mathrm{cl}(0) \qquad \mathrm{cl}(1) \qquad \mathrm{cl}(2) \qquad \mathrm{cl}(3) \qquad \mathrm{cl}(4)$$

Ces 5 classes d'équivalences forment une partition de $\mathbb{Z}$ : tout entier est dans une et une seule de ces classes.

### 6.4 Relation d'ordre

**Définition 6.33 (Relation d'ordre)**

Une relation $\mathcal{R}$ définie sur un ensemble $E$ est une relation d'ordre si

1. $\mathcal{R}$ est réflexive, càd $\forall x \in E \quad x\mathcal{R}x$
2. $\mathcal{R}$ est antisymétrique, càd $\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}x) \implies x = y$
3. $\mathcal{R}$ est transitive, càd $\forall x, y, z \in E \quad x\mathcal{R}y \quad \text{et} \quad y\mathcal{R}z \implies x\mathcal{R}z$

On appelle ensemble ordonné un couple $(E, \mathcal{R})$ où $\mathcal{R}$ est une relation d'ordre sur $E$.

**Exemple 24.**

- Sur $\mathbb{R}$, la relation $x\mathcal{R}y \iff x \leq y$ est une relation d'ordre. On vérifie facilement la réflexivité et la transitivité. L'antisymétrie découle du fait que, pour tous $x, y \in \mathbb{R}$

$$(x \leq y \quad \text{et} \quad y \leq x) \implies x = y$$

- Il en va de même pour la relation $x\mathcal{R}y \iff x \geq y$.
- Pour tout ensemble $E$, $\subset$ est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$.
- Sur $\mathbb{R}$, la relation $x\mathcal{R}y \iff x < y$ n'est pas une relation d'ordre car elle n'est pas ...

**Définition 6.34 (Ordre total et partiel)**

Soit $(E, \mathcal{R})$ un ensemble ordonné. On dit que $\mathcal{R}$ définit un ordre total sur $E$ si

$$\forall x, y \in E \quad (x\mathcal{R}y \quad \text{ou} \quad y\mathcal{R}x)$$

On dit que c'est un ordre partiel s'il n'est pas total.

**Exemple 25.** Parmi les exemples précédents :

- $\leq$ est une relation d'ordre total : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a $x \leq y$ ou $y \leq x$.
- Il en va de même pour $\geq$.
- Par contre, $\subset$ est une relation d'ordre partiel, sauf exception. Par exemple, avec $E = \{0, 1\}$, on a $\{0\}, \{1\} \in \mathscr{P}(E)$ mais

$$\{0\} \not\subset \{1\} \qquad \text{et} \qquad \{1\} \not\subset \{0\}$$

### 6.5 Vocabulaire lié à l'ordre, revisité

**Définition 6.35 (Vocabulaire lié à l'ordre)**

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné, et $A$ une partie de $E$.

- $m \in E$ est un minorant de $A$ si $\quad \forall x \in A \quad m \preceq x$
- $M \in E$ est un majorant de $A$ si $\quad \forall x \in A \quad x \preceq M$
- $A$ est majorée (resp. minorée) si elle possède au moins un majorant (resp. minorant).
- $A$ est bornée si $A$ est majorée et minorée.
- $m \in E$ est **le** plus petit élément (ou minimum) de $A$ si $m$ est un minorant de $A$ et $m \in A$.
- $M \in E$ est **le** plus grand élément (ou maximum) de $A$ si $M$ est un majorant de $A$ et $M \in A$.

**Propriété 6.36 (Unicité)**

Le plus petit élément (resp. le plus grand) de $A$, s'il existe, est unique.

*Démonstration.* Immédiat par la propriété d'antisymétrie. $\square$

**Définition 6.37**

Soit $(E, \preceq)$ un ensemble ordonné et $x, y \in E$. On dit que $x, y$ sont comparables si $x \preceq y$ ou $y \preceq x$.

En particulier, l'ordre est total si et seulement si deux éléments quelconques sont toujours comparables. L'ordre est partiel si et seulement s'il existe deux éléments qui ne sont pas comparables.